数理解析研究所講究録
212巻 1974年 19-27



# 無限の遅れ時間を持った線形関数微分方程式について

東北大 理 内藤 敏機

無限の遅れ時間を持った線形関数微分方程式の解によって構成される半群の生成作用素を調べる。

## §1. 空間$\mathcal{B}$.

$x \in \mathbb{C}^d$ に対して $|x| = (|x_1|^p + \cdots + |x_d|^p)^{\frac{1}{p}}$ とする.

<u>定義.</u> $g(\theta)$ は $(-\infty, 0]$ で定義された単調増加な関数で, $g(\theta) > 0$, for $\theta \in (-\infty, 0]$, $\int_{-\infty}^{0} g(\theta) d\theta < \infty$ とする。与えられた定数 $r \geqq 0$, $p \geqq 1$ と上記の $g(\theta)$ に対して決る空間$\mathcal{B}$を次のような関数$\varphi$の族とする. $\varphi$は $(-\infty, 0]$ で定義された $\mathbb{C}^d$ の値をとる可測関数で, $[-r, 0]$ では連続で,

$$\|\varphi\| = \Big\{ \big(\sup_{-r \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|\big)^p + \int_{-\infty}^{0} |\varphi(\theta)|^p g(\theta) d\theta \Big\}^{\frac{1}{p}} < \infty .$$

$r = 0$ の場合は, $\varphi$ が $\theta = 0$ で連続である事は仮定しない。

$\mathcal{B}$は $\|\cdot\|$ を norm とする Banach space である. $r = 0$, $p = 2$

の場合は Hilbert space である。

$x:(-\infty, A)\to \mathbb{C}^d$, $A>0$, に対して, $x_t:(-\infty,0]\to\mathbb{C}^d$ を, $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, for $\theta\in(-\infty,0]$, で定義する。

$\varphi\in\mathcal{B}$, $b\geqq 0$ に対して, $\varphi^b=\varphi|_{(-\infty,-b]}$ とする. $\overline{\mathcal{B}_b}=\{\varphi^b \mid \varphi\in\mathcal{B}\}$ として, $\overline{\mathcal{B}_b}\ni\eta$ に対して,

$$\|\eta\|_{(b)}=\inf\{\|\varphi\| \mid \varphi^b=\eta,\ \varphi\in\mathcal{B}\}$$

とすると, $\|\cdot\|_{(b)}$ は $\overline{\mathcal{B}_b}$ 上の semi-norm である。この semi-norm による同値類を $\mathcal{B}_b$, $\mathcal{B}_b$ の norm を $\|\cdot\|_b$ と記す。

$\varphi\in\mathcal{B}$, $b\geqq 0$ に対して, $(-\infty,-b]$ 上の関数 $\tilde{\varphi}^b$ を, $\tilde{\varphi}^b(\theta)=\varphi(b+\theta)$, $\theta\in(-\infty,-b]$ によって定義する.

空間 $\mathcal{B}$ は次の性質を持つ事は既知である ([1], [3])。

$(H_1)$. $x:(-\infty,A)\to\mathbb{C}^d$, $A>0$, $x_0\in\mathcal{B}$, $[0,A)$ で $x$ は連続ならば, $t\in[0,A)$ に対して, $x_t\in\mathcal{B}$ であって, $t\mapsto x_t$ は $[0,A)$ から $\mathcal{B}$ への連続写像である.

$(H_2)$. ある定数 $c_1, c_2>0$ が存在して, $\forall b\geqq 0$, $\forall\varphi\in\mathcal{B}$ に対して.

$$\|\varphi\|\leqq c_1\left(\sup_{-b\leq\theta\leq 0}|\varphi(\theta)|\right)+c_2\|\varphi^b\|_b.$$

$(H_3)$. $\|\tilde{\varphi}^b\|_b\leqq\|\varphi\|$, for $\varphi\in\mathcal{B}$, $b\geqq 0$,

$$\lim_{b\to\infty}\|\tilde{\varphi}^b\|_b=0, \quad \text{for } \varphi\in\mathcal{B}.$$

$(H_4)$, $|\varphi(0)| \leqq \|\varphi\|$, for $\varphi \in \mathcal{B}$.

$(H_1)$ 〜 $(H_4)$ の他に、次の性質が成立する。

<u>補題</u> 1.1. $\eta(t)$ を、有限区間 $[a, b]$ で定義された $\mathcal{B}$ の値をとる連続関数で、$[a, b] \times (-\infty, 0]$ で定義される $y(t, \theta) \equiv \eta(t)(\theta)$ が $(t, \theta)$ の可測関数であるとする。そうすれば、$\mathcal{B}$ の元として、

$$\left(\int_a^b \eta(t)\, dt\right)(\theta) = \int_a^b y(t, \theta)\, dt.$$

## §2. $\mathcal{B}$ における線形関数微分方程式と半群.

$f$ を $\mathcal{B}$ から $\mathbb{C}^d$ への連続線形作用素とする。関数微分方程式

$$(2.1) \qquad \frac{dx}{dt} = f(x_t)$$

を考える。任意の $\varphi \in \mathcal{B}$ に対し、$x_0 = \varphi$ となる (2.1) の解 $x(\varphi)(t)$ は、$t \in [0, \infty)$ で一意的に存在する。$(H_1)$ 〜 $(H_4)$ と、Gronwall の不等式によって、次の補題を得る。

<u>補題</u> 2.1. ある定数 $c > 0$, $\alpha$ が存在して

$$\|x_t(\varphi)\| \leqq c e^{\alpha t} \|\varphi\|, \quad \text{for } \varphi \in \mathcal{B},\ t \in [0, \infty).$$

<u>定義</u> 2.2. 各 $t \geqq 0$ に対して、$T_t \in L(\mathcal{B}, \mathcal{B})$ を

$$T_t\varphi = x_t(\varphi) \qquad \text{for } \varphi \in \mathfrak{B}$$

と定義する。但し $x(\varphi)$ は $x_0 = \varphi$ をみたす (2.1) の解である。

明きらかに $\{T_t\}$ は semi-group の性質

$$(2.2)\begin{cases} T_t T_s = T_{t+s}, & \text{for } t, s \geqq 0 \\ T_0 = I & (\text{identity operator}) \\ \underset{t \to t_0}{s\text{-}\lim} T_t\varphi = T_{t_0}\varphi, & \text{for each } t_0 \geqq 0 \text{ and each } \varphi \in \mathfrak{B} \end{cases}$$

を満足し，補題 2.1 によって

$$(2.3) \qquad \|T_t\| \leqq c e^{\alpha t}, \qquad \text{for } t \geqq 0$$

を満す。$\{T_t\}$ の生成作用素を $A$ とする。即ち $A$ は

$$(2.4) \qquad A\varphi = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(T_h - I)\varphi$$

で定義され，$D(A)$ は右辺の極限が存在するような $\varphi \in \mathfrak{B}$ の全体である。

## §3. 関数解析の予備知識

この節で述べる事については，たとえば [4] を参照せよ。

$T$ を Banach space $X$ から $X$ への linear operator とする。$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$T(\lambda) = \lambda I - T$ とおく。$T$ の resolvent,

spectrum とは次のような $\lambda \in \mathbb{C}$ の集合である。
$P\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T(\lambda)$ が逆作用素を持たない$\}$; point spectrum.
$R\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid T(\lambda)^{-1}$ は存在するが、その定義域は dense でない$\}$; residual spectrum. $C\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid$ 定義域が dense な $T(\lambda)^{-1}$ が存在するが、非有界作用素である$\}$; continuous spectrum. $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid$ 定義域が dense な有界な $T(\lambda)^{-1}$ が存在する$\}$; resolvent set.
$\lambda_0 \in \rho(T)$ の時、$T(\lambda_0)^{-1} = R(\lambda_0; T)$ と書き、$T$ の $\lambda_0$ における resolvent と呼ぶ。

<u>定理</u> 3.1. $T$ を complex Banach space $X$ から $X$ への closed linear operator とする。この時任意の $\lambda_0 \in \rho(T)$ に対して、$R(\lambda_0; T)$ は $X$ の上全体で定義された bounded linear operator である。

$T_t : X \to X$, $t \geq 0$ を (2.2), (2.3) を満す semi-group とする。$T_t$ の infinitesimal generator を $A$ とする。

<u>定理</u> 3.2. $D(A)$ is dense in $X$.

<u>定理</u> 3.3. $\mathrm{Re}\,\lambda > \alpha$ ならば、$\lambda \in \rho(A)$ で

$$R(\lambda; A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t x \, dt, \quad \text{for} \quad x \in X.$$

<u>定理</u> 3.4. $A$ is a closed linear operator.

<u>定理</u> 3. 5.

$D(A) = R(R(\lambda; A))$, where $\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$,

$AR(\lambda;A)x = R(\lambda;A)Ax = (\lambda R(\lambda;A) - I)x$, for $x \in D(A)$,

$AR(\lambda;A)x = (\lambda R(\lambda;A) - I)x$, for $x \in X$,

$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \lambda(R(\lambda;A))x = x$, for $x \in X$.

$n > \alpha$ に対して

$$(3.1) \qquad J_n x = (I - n^{-1}A)^{-1}x = n(R(n;A))x = \int_0^\infty n e^{-nt} T_t x\, dt, \quad x \in X$$

とおくと，定理 3. 5 によって，$D(A) = R(J_n)$ が成立し，

$$(3.2) \qquad AJ_n x = n(J_n - I)x, \quad \text{for } x \in X.$$

## §4 $A$ の表現

$\{T_t\}$ を 2 節で定義した半群，$A$ をその生成作用素とする。

$n > \alpha$, $\varphi \in \mathcal{B}$ に対して，$J_n\varphi$ を (3.1) と同様に定義する。

<u>補題</u> 4. 1.

$$(J_n\varphi)(\theta) = \int_0^\infty n e^{-ns} x(\varphi)(s+\theta)\, ds.$$

証明．$t < \infty$ ならば 補題 1. 1 によって

$$\left(\int_0^t n e^{-ns} T_s\varphi\, ds\right)(\theta) = \int_0^t n e^{-ns} (T_s\varphi)(\theta)\, ds$$

$$= \int_0^t n e^{-ns} x(\varphi)(s+\theta)\,ds.$$

この式の右辺は，$(H_4)$ と補題 2.1 の評価式によって
$\int_0^\infty n e^{-ns} x(\varphi)(s+\theta)\,ds$ に収束する。

$(-\infty, 0]$ の任意の有界区間で絶対連続な関数の族を $\mathcal{A}$ とする。$\varphi \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$ に対して

$$\tilde{\varphi}(\theta) = \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{d\theta}(\theta) & \text{for a.e. } \theta \in (-\infty, 0) \\ f(\varphi) & \text{for } \theta = 0 \end{cases}$$

と定義する。

$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$(-\infty, 0]$ 上の関数 $\omega_\lambda$ を

$$\omega_\lambda(\theta) = \exp(\lambda\theta), \quad \text{for } \theta \in (-\infty, 0]$$

と定義する。

$e_j$, $j=1,\cdots,d$, を第 $j$ 成分は 1 で，他の成分は 0 であるような $\mathbb{C}^d$ の元とする。

<u>定理</u> 4.2.

$$\varphi \in D(A) \Leftrightarrow \varphi \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A} \text{ and } \tilde{\varphi} \in \mathcal{B}$$

$$A\varphi = \tilde{\varphi}, \quad \text{for } \varphi \in D(A).$$

## §5. Spectrum of $A$.

$\omega_{\lambda_0} \in \mathcal{B}$ ならば，$\mathrm{Re}\,\lambda \geqq \mathrm{Re}\,\lambda_0$ とすると $\omega_\lambda \in \mathcal{B}$ である．

$$(5.1) \qquad \beta = \inf \left\{ \mathrm{Re}\,\lambda \;\middle|\; \int_{-\infty}^{0} |\omega_\lambda(\theta)|^p g(\theta)\, d\theta < \infty \right.$$

によって $\beta$ を定義すると，$-\infty \leq \beta \leq 0$.

$\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$ ならば，$f(\omega_\lambda e_j)$，$j=1,\cdots,d$，が意味を持つ。$f(\omega_\lambda e_j)$ を第 $j$ 列とする $d\times d$ 行列を $C(\lambda)$ とする，$C(\lambda) = (f(\omega_\lambda e_1),\cdots, f(\omega_\lambda e_d))$．$E$ を $d\times d$ 単位行列として，$D(\lambda)$ を

$$D(\lambda) = \lambda E - C(\lambda) \qquad \text{for } \mathrm{Re}\,\lambda > \beta$$

によって定義される $d\times d$ 行列とする。

<u>補題</u> 5.1. $\det D(\lambda)$ は $\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$ で正則である。

<u>定理</u> 5.2.

$$\lambda \in P_\sigma(A) \iff \det D(\lambda) = 0.$$

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \subset P_\sigma(A) \cup \rho(A).$$

<u>系</u> 5.3. $\beta' > \beta$ ならば，実部が $\beta'$ より大きい $A$ の point spectrum は有限個である。

<u>系</u> 5.4. $\beta < 0$ ならば，正実部を持つ $A$ の point spectrum は有限個である。

負の実部を持つ spectrum については空間 $\mathcal{B}$ が特殊な場合次の定理を得た。

定理 5.5. $g(\theta)$ が

$$g(u+v) \leqq g(u)\, g(v) \quad \text{for every } u, v \in (-\infty, 0]$$

を満すならば, $\mathrm{Re}\,\lambda > \beta$, $\det D(\lambda) \neq 0$ ならば $\lambda \in \rho(A)$.

$g(\theta) = e^{-\theta^2}$ ならば定理 5.5 の条件が満される。この場合は, $\beta = -\infty$ であるから, $A$ の spectrum は point spectrum のみで, それは $\det D(\lambda) = 0$ の根である。$\beta > -\infty$ の場合は, $\mathrm{Re}\,\lambda < \beta$ ならば, $\lambda \notin \rho(A)$ となる事が普通である.

有限の遅れ時間を持った線形関数微分方程式の場合については[2]を見よ.

## 参考文献

[1], J. K. Hale, Dynamical systems and stability, J. Math. Anal. Appl., 20(1969), 39-59.

[2] ————, "Functional Differential Equations", Springer-Vlg, 1971.

[3] T. Naito, Integral manifolds for linear functional differential equations on some Banach space, Funkcialaj Ekvacioj, 13(1970), 199-213.

[4] K. Yoshida, "Functional Analysis", Springer-Vlg, 1971.